COLLÈGE DE BOIS-DE-BOULOGNE

Fonds de recherche Nature et technologies Québec

L'anatomie des nombres entiers

Entre addition et multiplication

Crystel Bujold

crystel.bujold@bdeb.qc.ca

Mise en Bouche

La **théorie des nombres** s'intéresse à toutes les questions concernant les nombres entiers. Parmi celles-ci se trouve une question centrale, à la fois simple et compliquée:

Peut-on comprendre et décrire l'anatomie des nombres entiers?

Dans ce projet, on utilise les fonctions comme outil pour mieux comprendre les entiers et on montre que si une fonction mimique leur structure, faisant intervenir l'addition et la multiplication, alors elle est contrainte à être neutre sur presque tous les entiers.

Squelette: Les nombres premiers

D'apparence simple, les nombres entiers cachent une structure complexe où s'entremêle **addition** et **multiplication**.

1. **Addition**

L'ensemble des entiers $\mathbb{Z} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \cdots\}$ est construit effectuant indéfiniment $+1$ pour obtenir le nombre suivant.

Les entiers sont donc reliés les uns aux autres par l'addition.

2. **Multiplication**

Les entiers sont aussi intimement reliés aux nombres premiers par la multiplication:

Théorème fondamental d'arithmétique

Tout entier n possède une décomposition unique en facteurs premiers:

$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_s^{b_s}$$

Exemple :

$$36 = 4 + 32$$

$$36 = 2^2 * 3^2$$

L'addition et la multiplication ne sont pas des opérations qui se mélangent bien!!

$\Longrightarrow$ **Ceci rend difficile la compréhension de l'anatomie des nombres entiers.**

Rappel: Les nombres premiers

Un **nombre premier** p est un entier qui ne peux être divisé que par lui même.

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \cdots\}$$

Your paragraph text

Petit glossaire

pgcd(a, b) :Plus grand commun diviseur de a et b.

pgcd$(a, b) = 1$ $\Longrightarrow$ a et b n'ont pas de diviseurs communs.

Exemple:

$$\text{pgcd}(21, 60) = 3$$

comme le montre la décomposition

$$21 = 3 * 7 \quad \text{et} \quad 60 = 2^2 * 3 * 5.$$

Exemple:

$$\text{pgcd}(8, 35) = 1$$

comme le montre la décomposition

$$8 = 2^3 \quad \text{et} \quad 35 = 5 * 7.$$

Progression arithmétique:

Suite de nombres qui débute à a et fait un bond constant de longueur d entre chaque terme.

$$\mathscr{P} = \{a + kd\}$$

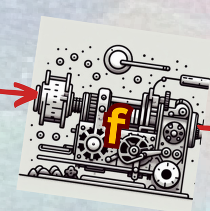
où a, d sont fixés et k varie dans les entiers.

ex:

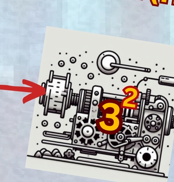
$$\mathscr{P} = \{3 + 4k\} = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, \cdots\}$$

Outil de dissection: Les fonctions

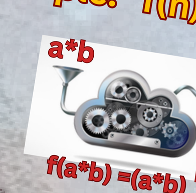
Une **fonction**, qu'on appellera **f**, est comme une **machine** de transformation: On y insère un nombre x qui sera transformé (souvent par des opérations arithmétiques) et il en ressortira un nombre y.



Exemple: f(n) = n²



Exemple: f(n) = nᵏ



Fonctions multiplicatives

On dit qu'une fonction est **multiplicative** si la condition suivante est respectée :

$$f(a * b) = f(a) * f(b) \quad \text{si pgdc}(a, b) = 1.$$

Conséquence:

Écrivons n dans sa décomposition en facteurs premiers

$$n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_s^{b_s},$$

Alors,

$$f(n) = f(p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_s^{b_s})$$

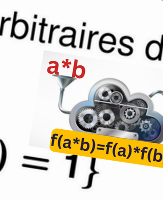
$$= f(p_1^{b_1}) f(p_2^{b_2}) \cdots f(p_s^{b_s})$$

Connaitre $f(p^b)$ pour tous les premiers p

$\Longrightarrow$ **Connaitre $f(n)$ pour tous les entiers n.**

Dans ce projet on travaillera avec des fonctions arbitraires dans l'ensemble de toutes les fonctions multiplicatives:

$$\mathfrak{F} = \{f(n) : f(ab) = f(a)f(b) \text{ si pgcd}(a, b) = 1\}$$



Pourquoi?!

1. En se séparant sur les facteurs premiers, f respecte la **structure interne** des nombres entiers.

   Information sur f $\Longrightarrow$ Information sur les entiers

2. Plusieurs encodent aussi de l'information arithmétique:

   Exemple:

   $$\tau(n) = \text{\# diviseurs de } n$$

Diagnostique: Les résultats

Théorème

Soit a et d des entiers tels que pgcd$(a, d) = 1$, et que pgcd$(a, d + 1) = 1$ ou pgcd$(a, d + 2) = 1$.

Soit la progression arithmétique $\mathscr{P} = \{a + kd : k \text{ est un entier}\}$.

Laissons f être une fonction respectant les conditions

1. $f(b * c) = f(b) * f(c)$ (fonction multiplicative)
2. $f(m + n) = f(m) + f(n)$ si m et n sont dans l'ensemble $\mathscr{P}$

Alors f est la fonction identité;

$$f(n) = n$$

pour tous les entiers n sans diviseurs communs avec d.

Examen anatomique: Éléments clés

1. $f(n) = f(p_1^{b_1}) f(p_2^{b_2}) \cdots f(p_s^{b_s})$
2. $f(2a + kd) = f(a + k_1 d) + f(a + k_2 d)$
3. $f(1 + kd) = 1 + kd$
4. $1 + kd = p^b(1 + prm)$
5. $p^b(1 + prm) = f(p^b) f(1 + prm)$
6. $f(p^b) = p^b$
7. $f(n) = n$

Important!!

Important!!

Victoire!!!

1. Fonctions multiplicatives $\Longrightarrow$ Suffisant de montrer $f(p^b) = p^b$.

2. Si m et n sont dans P, alors

$$m = a + k_1 d \quad \text{et} \quad n = a + k_2 d$$

et donc

$$m + n = 2a + kd \quad \text{où } k = k_1 + k_2.$$

3. On déduit ceci à l'aide des propriétés (1) et (2).

4. On montre que pour tout les entiers r et premiers p, il existe des entiers k et m (inconnus) pour lesquels l'égalité tient.

5. On utilise l'égalité en (3) et la propriété multiplicative en 1 pour relier $f(p^b)$ et p^b.

6. On utilise la flexibilité de l'entier r qu'on choisit judicieusement pour montrer qu'on doit avoir $f(p^b) = p^b$.

7. À l'aide des points (1) et (6), on peut en déduire le théorème: $f(n) = n$ (pour presque tous les entiers).

Mélanger addition et multiplication, c'est contraignant!!

Interprétation

- Les résultats illustrent que la combinaison des propriétés d'addition et multiplication est contraignante.
- Ceci nous confirme la complexité des nombres entiers, qui possèdent à la fois les propriétés d'addition et de multiplication.
- Comme la fonction respecte l'addition sur un ensemble limité d'entiers, elle conserve un peu de flexibilité quant aux valeurs prises sur les entiers qui on des diviseurs communs avec d.
- On obtient aussi de l'information sur le fonctions multiplicatives